Applications - Chapitre 7

Energie potentielle, énergie mécanique et résonance

EPFL

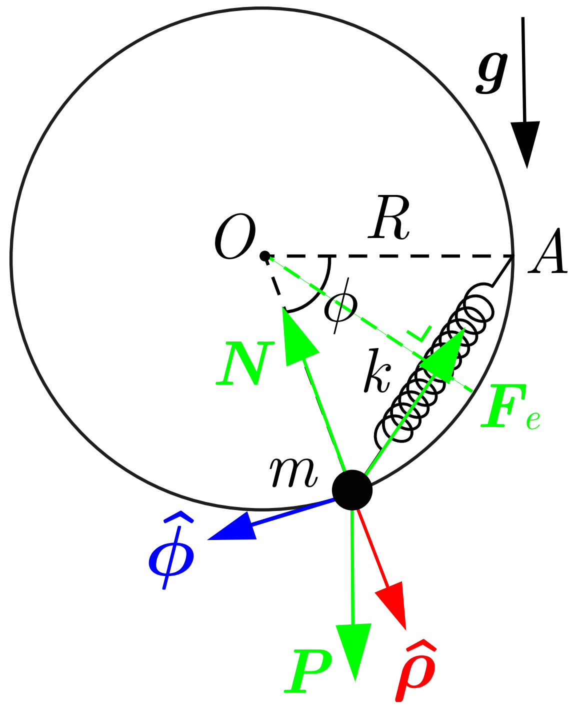
A.7.1 Point matériel oscillant sur un cercle

A.7.2 Pendule asymétrique

A.7.1 Point matériel oscillant sur un cercle

A.7.2 Pendule asymétrique

- Un point matériel de masse m attaché à un ressort de constante élastique k et de longueur à vide négligeable fixé en A se déplace sans frottement sur un cercle vertical de centre O et de rayon R.



- Energies potentielles :

  1. Gravitationnelle : (référence : droite OA)

$$V_g = -\,mgR\sin\phi \qquad (A.7.1)$$

  2. Elastique : (référence : point A)

$$V_e = \frac{1}{2}\,k\left(2\,R\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\right)^2 \qquad (A.7.2)$$

- Energie potentielle totale :

$$V = V_e + V_g = 2\,kR^2\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) - \,mgR\sin\phi \qquad (A.7.3)$$

- Formule de trigonométrie : $\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{1 - \cos\phi}{2}$

$$(A.7.3) \quad \Rightarrow \quad V = kR^2\left(1 - \cos\phi\right) - mgR\sin\phi \qquad (A.7.4)$$

- Positions d'équilibre : $\left.\frac{dV}{d\phi}\right|_{\phi=\phi_0} = 0$

$$\left.\frac{dV}{d\phi}\right|_{\phi=\phi_0} = kR^2\sin\phi_0 - mgR\cos\phi_0 = 0 \qquad (A.7.5)$$

$$\Rightarrow \quad \tan\phi_0 \equiv \frac{\sin\phi_0}{\cos\phi_0} = \frac{mg}{kR} > 0 \qquad (A.7.6)$$

1. $\phi_0 = \arctan\left(\frac{mg}{kR}\right) \equiv \phi_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
2. $\phi_0 = \arctan\left(\frac{mg}{kR}\right) + \pi \equiv \phi_2 \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$

- Stabilité des positions d'équilibre :

$$\left.\frac{d^2V}{d\phi^2}\right|_{\phi=\phi_0} = \frac{d}{d\phi}\left.\left(\frac{dV}{d\phi}\right)\right|_{\phi=\phi_0} = \frac{d}{d\phi}\left.\left(kR^2\sin\phi - mgR\cos\phi\right)\right|_{\phi=\phi_0}$$

$$= kR^2\cos\phi_0 + mgR\sin\phi_0 = kR^2\left(1+\frac{mg}{kR}\tan\phi_0\right)\cos\phi_0$$

$$\overset{(A.7.6)}{=\!=\!=} kR^2\left(1+\frac{m^2g^2}{k^2R^2}\right)\cos\phi_0 \qquad (A.7.7)$$

1. $\phi_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \cos\phi_1 \equiv \cos\phi_0 > 0$

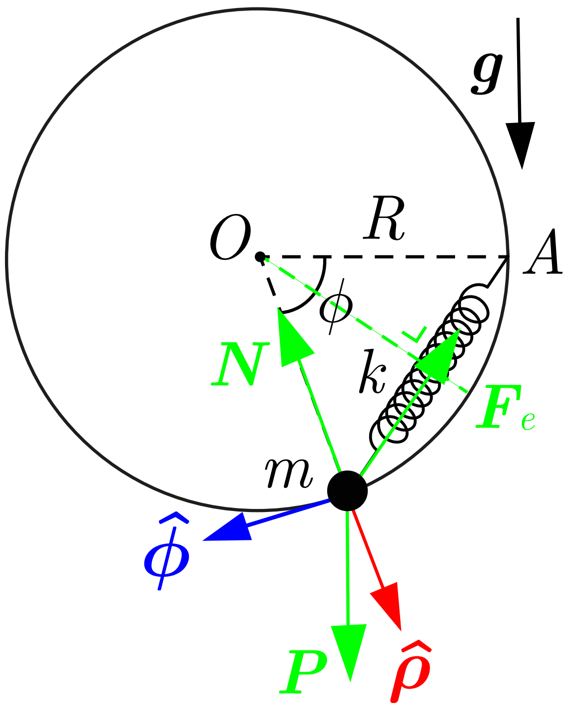
   $\Rightarrow \quad \left.\frac{d^2V}{d\phi^2}\right|_{\phi=\phi_0\equiv\phi_1} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{stable}$

2. $\phi_2 \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \cos\phi_2 \equiv \cos\phi_0 < 0$

   $\Rightarrow \quad \left.\frac{d^2V}{d\phi^2}\right|_{\phi=\phi_0\equiv\phi_2} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{instable}$

- Interprétation physique :

  La position d'équilibre ϕ_1 qui est en dessous du point d'attache A est stable, la position d'équilibre $\phi_2 = \phi_1 + \pi$ qui est en-dessus du point A est instable.



- Energie cinétique :

$$T = \frac{1}{2}\, m\boldsymbol{v}^2 = \frac{1}{2}\, m \left(R\,\dot{\phi}\,\hat{\boldsymbol{\phi}}\right) \cdot \left(R\,\dot{\phi}\,\hat{\boldsymbol{\phi}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\, m\, R^2 \dot{\phi}^2 \qquad (A.7.8)$$

- Energie mécanique :

$$E = T + V = \frac{1}{2}\, m\, R^2 \dot{\phi}^2 + kR^2\left(1 - \cos\phi\right) - mgR\sin\phi \qquad (A.7.9)$$

- Conservation de l'énergie mécanique : $(E = \text{cste})$

$$\dot{E} = m\,R^2\dot{\phi}\,\ddot{\phi} + kR^2\dot{\phi}\sin\phi - \,mgR\,\dot{\phi}\cos\phi = 0 \tag{A.7.10}$$

- Equation du mouvement :

$$(A.7.10) \quad \Rightarrow \quad \ddot{\phi} + \frac{k}{m}\sin\phi - \frac{g}{R}\cos\phi = 0 \tag{A.7.11}$$

- Petites oscillations autour de la position d'équilibre stable $\phi = \phi_1$:

$$\alpha = \phi - \,\phi_1 \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\alpha} = \ddot{\phi} \quad \text{et} \quad \sin\alpha \simeq \alpha \quad \text{et} \quad \cos\alpha \simeq 1$$

$$(A.7.10) \quad \Rightarrow \quad \ddot{\alpha} + \frac{k}{m}\sin(\phi_1 + \alpha) - \frac{g}{R}\cos(\phi_1 + \alpha) = 0 \tag{A.7.12}$$

- Formules de trigonométrie : $(\alpha \ll 1)$

$$\sin(\phi_1 + \alpha) \simeq \sin\phi_1 + \cos\phi_1\,\alpha \tag{A.7.13}$$

$$\cos(\phi_1 + \alpha) \simeq \cos\phi_1 - \,\sin\phi_1\,\alpha \tag{A.7.14}$$

- Equation du mouvement : (petites oscillations)

$$\ddot{\alpha} + \frac{k}{m}\left(\sin\phi_1 + \cos\phi_1\,\alpha\right) - \frac{g}{R}\left(\cos\phi_1 - \sin\phi_1\,\alpha\right) = 0 \qquad (A.7.15)$$

$$\ddot{\alpha} + \left(\frac{k}{m}\cos\phi_1 + \frac{g}{R}\sin\phi_1\right)\alpha + \left(\frac{k}{m}\sin\phi_1 - \frac{g}{R}\cos\phi_1\right) = 0$$

$$\ddot{\alpha} + \left(1 + \frac{mg}{kR}\underbrace{\tan\phi_1}_{=mg/kR}\right)\frac{k}{m}\cos\phi_1\,\alpha + \left(\underbrace{\tan\phi_1}_{=mg/kR} - \frac{mg}{kR}\right)\frac{k}{m}\cos\phi_1 = 0$$

$$\ddot{\alpha} + \left(\left(1 + \frac{m^2g^2}{k^2R^2}\right)\frac{k}{m}\cos\phi_1\right)\alpha = 0 \qquad (A.7.16)$$

- Identité trigonométrique :

$$\sin^2\phi_1 + \cos^2\phi_1 = 1 \quad \xRightarrow{\cdot 1/\cos^2\phi_1} \quad \tan^2\phi_1 + 1 = \frac{1}{\cos^2\phi_1}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\phi_1}} = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{m^2g^2}{k^2R^2}}} \qquad (A.7.17)$$

- Equation du mouvement : (petites oscillations)

$$\ddot{\alpha} + \left(\frac{k}{m} \sqrt{1 + \frac{m^2 g^2}{k^2 R^2}} \right) \alpha = 0 \qquad (A.7.18)$$

- Pulsation :

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \sqrt{1 + \frac{m^2 g^2}{k^2 R^2}} = \sqrt{\frac{k^2}{m^2} + \frac{g^2}{R^2}} \qquad (A.7.19)$$

1. $\|\boldsymbol{F}_e\| \gg \|\boldsymbol{P}\| \quad \Rightarrow \quad kR \gg mg \quad \Rightarrow \quad \frac{k}{m} \gg \frac{g}{R} \quad \Rightarrow \quad \omega^2 \simeq \frac{k}{m}$

   Poids négligeable $\Rightarrow$ oscillateur harmonique

   Angle d'équilibre : $\phi_1 = \arctan\left(\frac{mg}{kR}\right) \to 0$

2. $\|\boldsymbol{P}\| \gg \|\boldsymbol{F}_e\| \quad \Rightarrow \quad mg \gg kR \quad \Rightarrow \quad \frac{g}{R} \gg \frac{k}{m} \quad \Rightarrow \quad \omega^2 \simeq \frac{g}{R}$

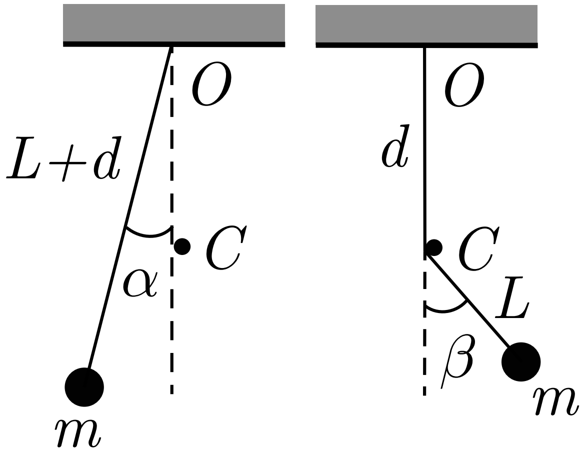
   Force élastique négligeable $\Rightarrow$ pendule vertical

   Angle d'équilibre : $\phi_1 = \arctan\left(\frac{mg}{kR}\right) \to \frac{\pi}{2}$

A.7.1 Point matériel oscillant sur un cercle

A.7.2 Pendule asymétrique

- Soit un pendule asymétrique constitué d'une masse m attachée à un fil de longueur $L + d$ et de masse négligeable fixé au point O. Un clou se trouve au point C à une distance d au-dessous de O.



1. Gauche :

   - Energie cinétique :

$$T_g = \frac{1}{2}\, m\, v^2 = \frac{1}{2}\, m\, (L + d)^2\, \dot{\alpha}^2 \tag{A.7.20}$$

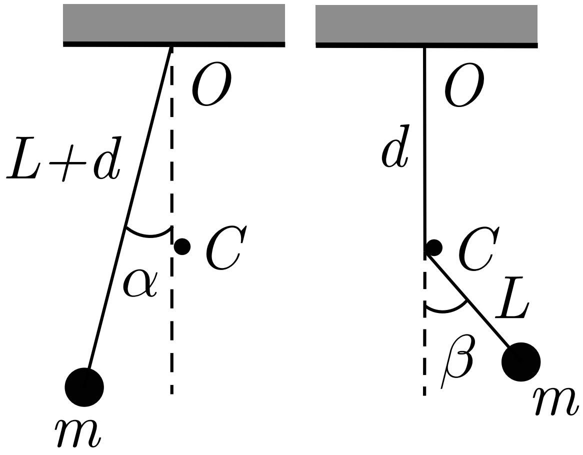
   - Energie potentielle :

$$V_g = -\, mg\, (L + d) \cos\alpha \tag{A.7.21}$$

   - Energie mécanique :

$$E = T_g + V_g = \frac{1}{2}\, m\, (L + d)^2\, \dot{\alpha}^2 - \, mg\, (L + d) \cos\alpha \tag{A.7.22}$$

2. Droite :



- Energie cinétique :

$$T_d = \frac{1}{2}\, m\, v^2 = \frac{1}{2}\, mL^2 \dot{\beta}^2 \qquad (A.7.23)$$

- Energie potentielle :

$$V_d = -\, mg\, (d + L\cos\beta) \qquad (A.7.24)$$

- Energie mécanique :

$$E = T_d + V_d = \frac{1}{2}\, mL^2 \dot{\beta}^2 - \, mg\, (d + L\cos\beta) \qquad (A.7.25)$$

- Equations du mouvement : $(E = \text{cste})$

1. Gauche :

$$\dot{E} = m\,(L+d)^2\,\ddot{\alpha}\,\dot{\alpha} + mg\,(L+d)\sin\alpha\,\dot{\alpha} = 0 \qquad (A.7.26)$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\alpha} + \frac{g}{L+d}\,\sin\alpha = 0 \qquad (A.7.27)$$

2. Droite :

$$\dot{E} = m\,L^2\,\ddot{\beta}\,\dot{\beta} + mgL\sin\beta\,\dot{\beta} = 0 \qquad (A.7.28)$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\beta} + \frac{g}{L}\,\sin\beta = 0 \qquad (A.7.29)$$

- Petites oscillations autour de l'équilibre $\alpha = \beta = 0$:

  1. Gauche : $\alpha \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha \simeq \alpha$

$$(A.7.27) \quad \Rightarrow \quad \ddot{\alpha} + \omega_g^2\,\alpha = 0 \tag{A.7.30}$$

$$\text{où} \quad \omega_g^2 = \frac{g}{L+d} \tag{A.7.31}$$

  2. Droite : $\beta \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \sin\beta \simeq \beta$

$$(A.7.29) \quad \Rightarrow \quad \ddot{\beta} + \omega_d^2\,\beta = 0 \tag{A.7.32}$$

$$\text{où} \quad \omega_d^2 = \frac{g}{L} \tag{A.7.33}$$

- Demi-périodes d'oscillation : $\omega_g < \omega_d$

$$\omega_g < \omega_d \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{\omega_g} > \frac{\pi}{\omega_d} \tag{A.7.34}$$

La demi-période d'oscillation à gauche π/ω_g est plus longue que la demi-période d'oscillation à droite π/ω_d.